

2014年7月24日，北京理工大学

2014 Workshop on Distributed Coordinated Control of Dynamic Multi-Agent Systems

基于有限信息数据的辨识与控制

张纪峰

中国科学院数学与系统科学研究院
系统科学研究所

对于一个给定的控制任务，
究竟需要多少信息量？

- ◆可否基于低精度数据给出高精度的辨识
- ◆可否基于低精度数据给出渐近最优的适应跟踪控制
- ◆可否基于1比特的通信数据实现趋同控制

对于一个给定的辨识或控制任务，
究竟需要多少信息量？

内容提纲

- ◆ 问题背景
- ◆ 参数辨识
- ◆ 适应跟踪控制
- ◆ 多自主主体系统控制
- ◆ 结束语

问题背景

状态反馈控制

被控系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du;\end{aligned}$$



控制器

$$u = Kx$$

极点配置、
镇定控制、
LQ控制、
鲁棒控制、.....

关键条件：状态已知！

输出反馈控制

被控系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du;\end{aligned}$$



控制器

$$\begin{aligned}u &= Ky; \\ \begin{cases} \dot{\hat{x}} = Ny + Fu \\ u = K\hat{x} + Hy; \end{cases}\end{aligned}$$

静态输出反馈控制、
动态输出反馈控制、
.....

关键条件：输出已知！

滤波、参数辨识、适应控制

- 系统模型：

- * $\dot{x} = Ax + Bu$ —— 状态的量测噪声为高斯白噪声

- *
$$y_k = \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{k-i} + d_k = \theta^T \varphi_k + d_k$$

- 辨识算法：LS、SG、LMS、KF、...

- 关键条件：输出/状态是(基本)知道的！

(带有具有一定统计特性的量测噪声！)

最小二乘法

$$y_k = \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{k-i} + d_k = \theta^\tau \varphi_k + d_k$$

当 y_k 已知时，我们可用最小二乘法估计参数：

$$\hat{\theta}_k = \arg \min_{\theta \in R} \sum_{i=1}^k (y_i - \theta^\tau \varphi_{i-1})^2;$$

可用必然等价原则设计适应控制。

最小二乘法

$$y_k = \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{k-i} + d_k = \theta^\tau \varphi_k + d_k$$

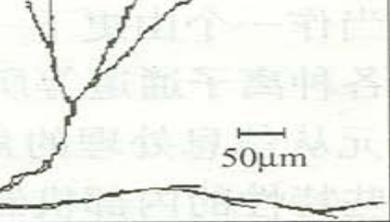
当 y_k 已知时，我们可用最小二乘法估计参数：

$$\hat{\theta}_k = \arg \min_{\theta \in R} \sum_{i=1}^k (y_i - \theta^\tau \varphi_{i-1})^2;$$

可用必然等价原则设计适应控制。

问题： 当系统的被控输出基本不知道时，
可否也能设计出好的适应控制律？

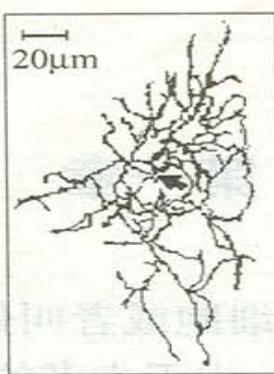




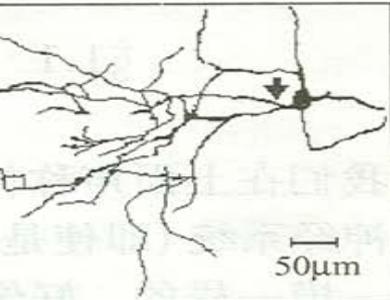
(e)



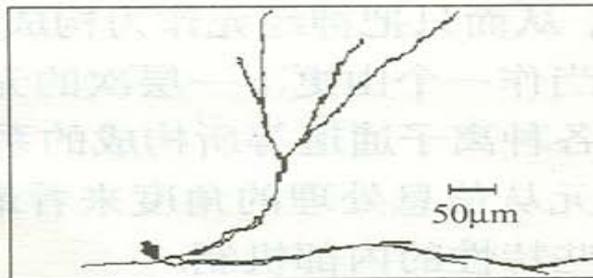
(b)



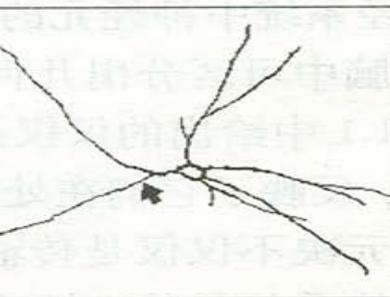
(c)



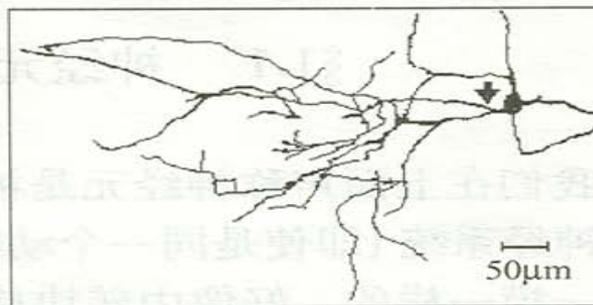
(f)



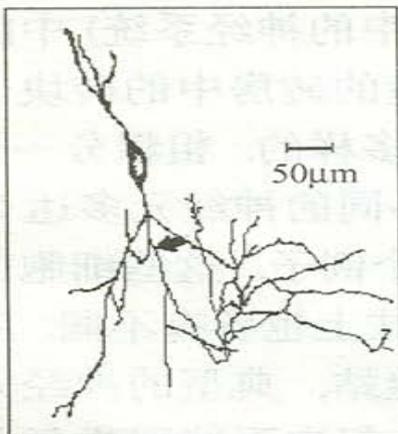
(e)



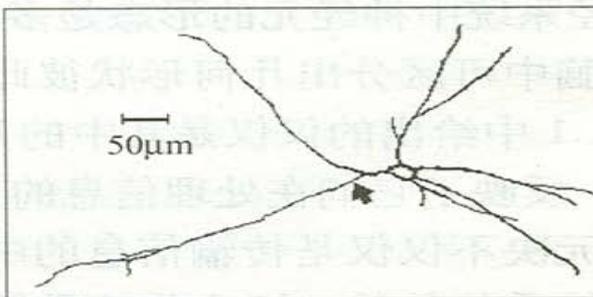
(h)



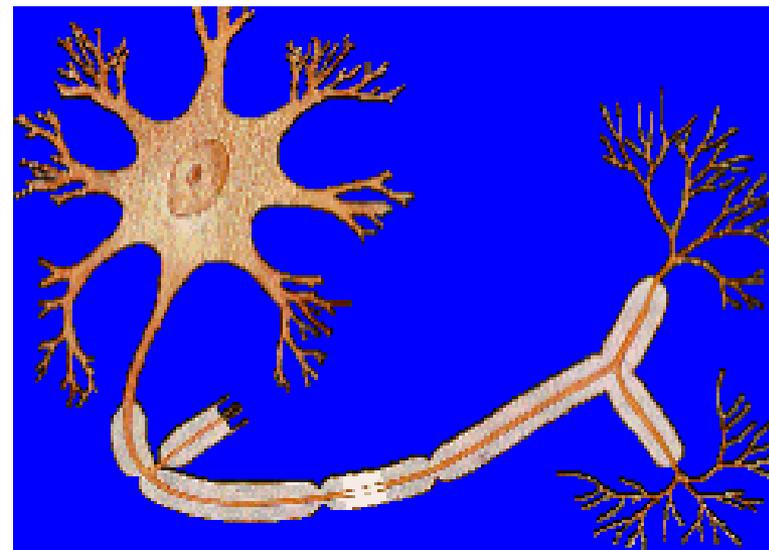
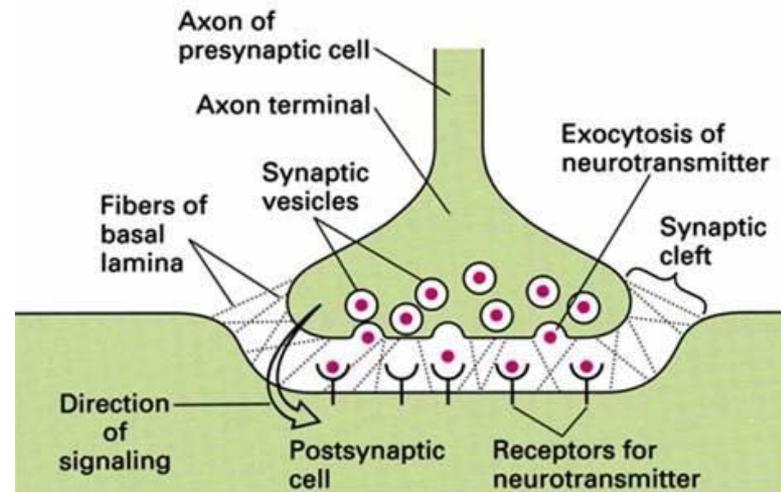
(f)



(g)



(h)



只有集值信息可用

难以拿到精度高的数据



捷赛自动烹饪锅——智能炒菜机具备煎鱼、炒菜、烹调、炸虾、爆料、焖饭、蒸馒头、煮粥、烙饼、炖肉、煲烫等烹饪技术的智能化，不会做饭的人也能轻松做出美味菜肴。

用精度高的温度敏感器件不合算！！



- 温度测量
- 品质控制



有限信息数据的辨识与控制

- 有时不需要精确的数据;
- 有时只有粗糙/集值数据可用;
- 有时精确数据难以得到;
- 有时使用精度高的测量元件不合算;
- 有时因带宽的限制只能得到量化数据;
-

科学问题：

可否基于低精度测量器件提供的
数据给出高精度的模型和满
意控制？

例如, 只能测到它与某个阈值的大小比较关系:

$$y_k \in (c_k, \infty) \quad \text{还是} \quad y_k \in (-\infty, c_k],$$

其中 $y_k \in \mathbf{R}$ 是被控输出, $c_k \in \mathbf{R}$ 是阈值。

称为二集值输出系统

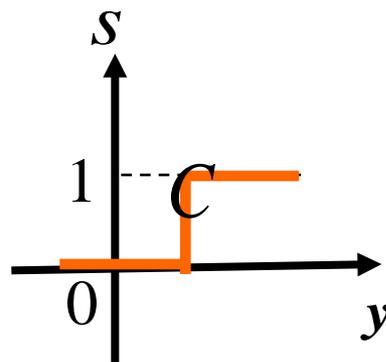
集值测量元件

■ 二集值测量元件

$$y_k \geq C \text{ 或 } y_k < C$$

阈值

$$q_k = \begin{cases} 1, & \text{if } y_k > C \\ 0 & \text{if } y_k \leq C. \end{cases}$$

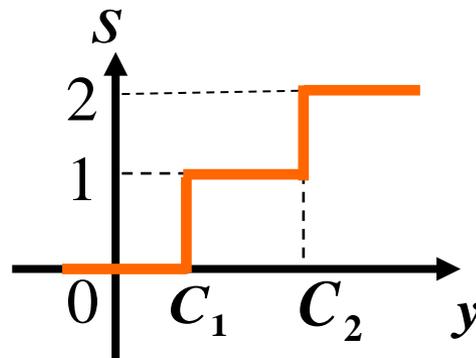


- ◆ 传感器网络
- ◆ 集成电路
- ◆ 网络通讯
- ◆ 机械系统
- ◆ 智能材料
- ◆ 汽车
- ◆ 化工
- ◆ 生物、...

■ 三集值测量元件

阈值

$$q_k = \begin{cases} 2, & \text{if } y_k > C_2; \\ 1, & \text{if } C_1 < y_k \leq C_2; \\ 0, & \text{if } y_k \leq C_1. \end{cases}$$



集值输出的特点

◆ 信息量少(字节有限)、非线性强:

- A. 量测到的只是被控制信号与阈值的比较关系，不是被控制信号本身。
- B. 与采样系统不同，在采样系统中，量测到的是采样时刻上系统输出的精确值。
- C. 与通常的量化系统不同，在已有的量化系统的滤波、估计等工作中，要求量化误差充分小或者具有很好的统计特性(闭环条件)

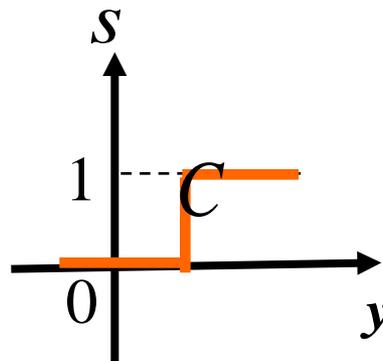
集值测量元件

■ 二集值测量元件

$$y_k \geq C \text{ 或 } y_k < C$$

阈值

$$q_k = \begin{cases} 1, & \text{if } y_k > C \\ 0 & \text{if } y_k \leq C. \end{cases}$$



$$y_k \text{ 已知: } y_k = b u_k \quad \longrightarrow \quad b = y_1 / u_1$$

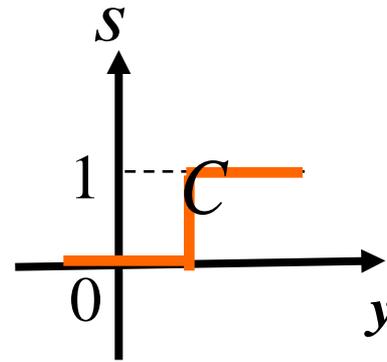
集值测量元件

■ 二集值测量元件

$$y_k \geq C \text{ 或 } y_k < C$$

阈值

$$q_k = \begin{cases} 1, & \text{if } y_k > C \\ 0 & \text{if } y_k \leq C. \end{cases}$$



$$y_k \text{ 已知: } y_k = b u_k \quad \longrightarrow \quad b = y_1 / u_1$$

$$y_k \text{ 未知: } y_k = b u_k \quad \not\longrightarrow \quad b = y_1 / u_1$$

参数辨识

关键科学问题

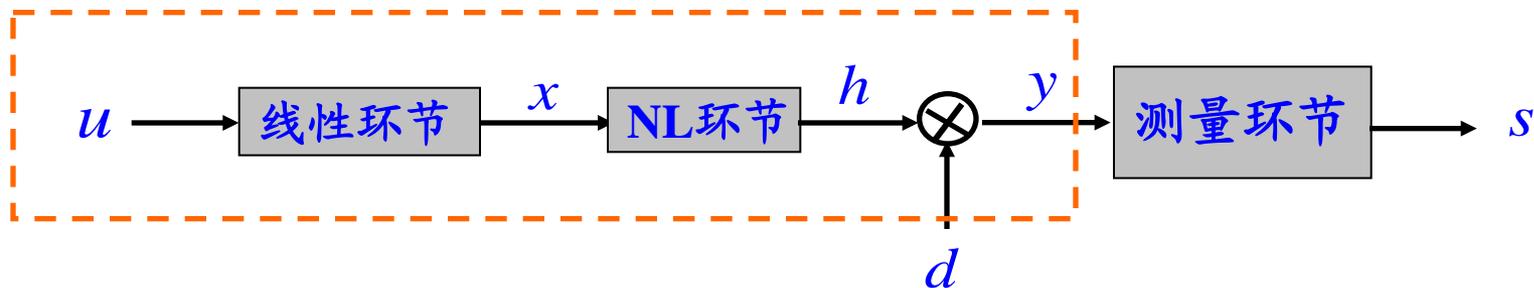
- ◆ 可辨识性
- ◆ 精度及收敛速度
- ◆ 输入信号设计
- ◆ 不确定性对辨识精度、收敛速度及计算复杂度的影响
- ◆ 阈值分布对辨识精度、收敛速度及计算复杂度的影响

系统模型

● **ARX:**
$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(t-i) + d(t)$$

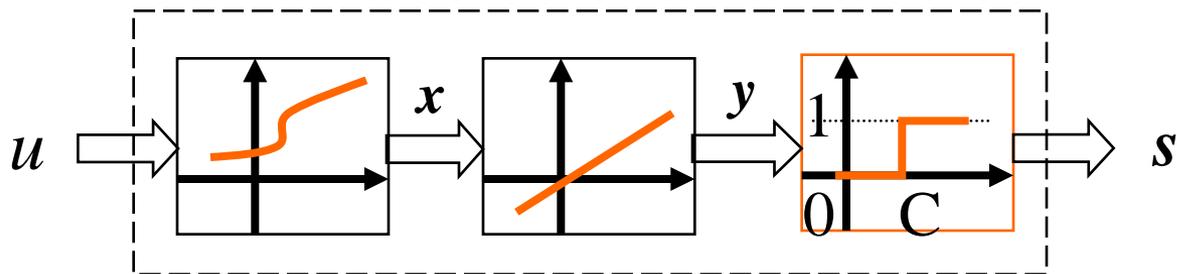
其中 a_i 、 b_i 是未知参数, $d(t)$ 是未知干扰

● **Wiener 系统:**



$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u(t-i), \quad y(t) = \sum_{i=0}^{m-1} x^i(t) b_i + d(t)$$

● Hammerstein系统:



$$NL_1(\eta) \longrightarrow \mathbf{L}(\theta) \longrightarrow NL_2$$

模型:

$$\begin{cases} y(k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x(k-i) + d(k), \\ x(k) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j u^j(k), \quad b_m = 1. \end{cases}$$

辨识算法

- 二分法 $\longrightarrow y(t) = bu(t) + d(t),$

- 参数解耦法 $\longrightarrow y(t) = \sum_{i=1}^n b_i u(t-i) + d(t)$

- 持续激励 $\longrightarrow y(t) = \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(t-i) + d(t)$

- 周期输入

- 经验分布函数法：随机噪声情形

单参数情形

- **模型:** $y(t) = bu(t)$

$$b \in [\underline{b}(0), \bar{b}(0)], \\ 0 < \underline{b}(0) < \bar{b}(0).$$

初值
条件

- **输入:** $u(1) = \frac{2C}{\underline{b}(0) + \bar{b}(0)}$

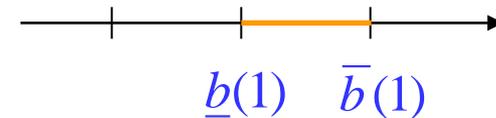
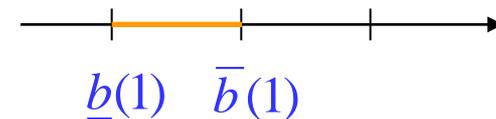


二集值

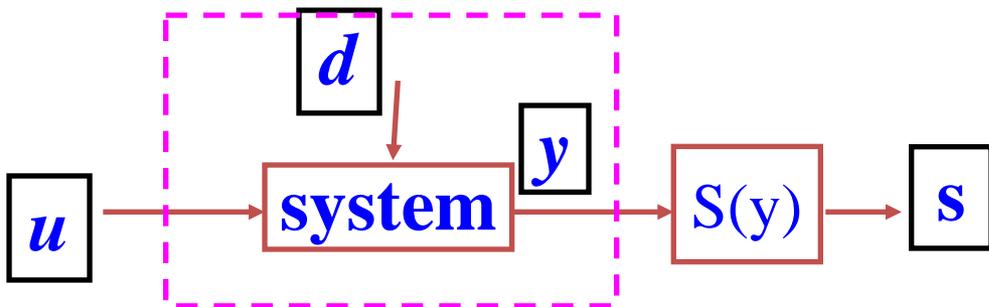
- **1-步辨识误差:**

$$\text{若 } y(1) \leq C, \text{ 则 } b \leq \bar{b}(1) = \frac{\underline{b}(0) + \bar{b}(0)}{2};$$

$$\text{若 } y(1) > C, \text{ 则 } b > \underline{b}(1) = \frac{\underline{b}(0) + \bar{b}(0)}{2}.$$



有限脉冲(FIR)系统



$$y(t) = \sum_{i=1}^n b_i u(t-i) + d(t)$$

$$s = S(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > C_1; \\ j, & \text{if } C_j < x \leq C_{j-1}, \\ & j = 2, 3, \dots, m-1; \\ m, & \text{if } x \leq C_{m-1}. \end{cases}$$

时间复杂度

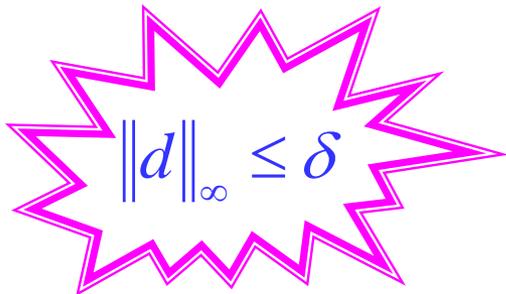
定理1: 对FIR系统, 设 $|d(t)| \leq \delta$,

记 $\bar{b}(0) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{b}_i(0)$, $\underline{b}(0) = \min_{1 \leq i \leq n} \underline{b}_i(0)$, $\varepsilon(0) = \text{Rad}(\Omega_0)$,

$$\sigma = \frac{m(C_1 - C_2) + 2\delta}{2C_1 - C_2 - \delta} \bar{b}(0), \quad \alpha_1 = \frac{(C_1 - C_{m-1} - 2\delta)\underline{b}(0)}{C_1 - \delta},$$

$\alpha_2 = (C_{m-1} + \delta)(C_1 + C_{m-1})^{-1}$, $C_1 - C_2 = \dots = C_{m-2} - C_{m-1}$,

则 $\forall \varepsilon \in (\sigma, \varepsilon(0))$, 有


$$\|d\|_\infty \leq \delta$$

$$N(\varepsilon) \leq \frac{\ell_n \ln \frac{\alpha_1 + \varepsilon n^{-1/2}}{(1 - \alpha_1)\varepsilon(0)}}{\ln \alpha_2}.$$

适应跟踪控制

集值输出系统的适应控制

考虑如下的单参数系统:

$$y_k = \theta u_{k-1} + d_k,$$

量测输出为:

$$s_k = I_{[y_k \leq c_k]} = \begin{cases} 1, & \text{if } y_k \leq C, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 u_k 、 d_k 、 $C \in \mathbf{R}$ 分别是输入、噪声和阈值;

$y_k \in \mathbf{R}$ 是系统的被控输出, 目标是极小化:

$$J_k = E(y_k - y_k^*)^2.$$

目的: 在参数未知时, 给出适应控制律

假设条件

- (A1) 已知正实数 $\bar{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$, $0 < \underline{\theta} < \bar{\theta} < \infty$, 使得 $|\theta| \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.
- (A2) 已知正实数 \bar{y}^* 和 \underline{y}^* , $0 < \underline{y}^* < \bar{y}^* < \infty$, 使得 $|y_k^*| \in [\underline{y}^*, \bar{y}^*]$.
- (A3) $\{d_k, k \geq 1\}$ 是零均值、有限方差 iid 随机序列, d_1 的分布函数 $F(x)$ 已知, 密度函数 $f(x)$ 关于 $x = 0$ 对称且在 $(0, \infty)$ 上单调递减, 其支撑集包含 $[-T, T]$, 即 $[-T, T] \subseteq \{x : f(x) \neq 0\}$. 这里 $T = |C| + 3\bar{\theta}\bar{y}^* / \underline{\theta}$.

辨识算法

记 $\Theta = [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$, 在 Θ 定义投影算子:

$$\Pi_{\Theta}(x) = \arg \min_{z \in \Theta} |x - z|,$$

则 θ 的估计由下式给出

$$\hat{\theta}_k = \Pi_{\Theta} \left\{ \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\beta P_{k-1} u_k}{1 + P_{k-1} u_k^2} [F(C - \hat{\theta}_{k-1} u_k) - s_k] \right\},$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{\gamma P_{k-1}^2 u_k^2}{1 + P_{k-1} u_k^2},$$

其中 $|\hat{\theta}_0| \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, $P_0 > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \in (0, 1]$, $F(\cdot)$ 是噪声 d_k 的分布函数.

辨识算法

$$\hat{\theta}_k = \Pi_{\Theta} \left\{ \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\beta P_{k-1} u_k}{1 + P_{k-1} u_k^2} [F(C - \hat{\theta}_{k-1} u_k) - s_k] \right\},$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{\gamma P_{k-1}^2 u_k^2}{1 + P_{k-1} u_k^2},$$

$$s_k = I_{[y_k \leq C]}$$

$F(\cdot)$ 是 d_k 的分布函数

常规LS



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{P_{k-1} u_k}{1 + P_{k-1} u_k^2} (y_k - \hat{\theta}_{k-1} u_k), \\ P_k = P_{k-1} - \frac{\gamma P_{k-1}^2 u_k^2}{1 + P_{k-1} u_k^2}. \end{array} \right.$$

适应控制律

$$u_k = \frac{y_k^*}{\hat{\theta}_{k-1}} I_{[\underline{\theta} \leq |\hat{\theta}_{k-1}| \leq \bar{\theta}]} + \frac{y_k^*}{\underline{\theta}} \left(I_{[0 < \hat{\theta}_{k-1} < \underline{\theta}]} - I_{[-\underline{\theta} < \hat{\theta}_{k-1} \leq 0]} \right) \quad (3)$$

定理2: 在假设(A1)-(A3)下, 有

◆参数估计

- 以概率1收敛到真值: $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}_k = \theta, \text{ a.s.}$
- 渐近有效(达到Cramer-Rao下界),
- 估计误差的均方收敛速度为

$$E \|\hat{\theta}_k - \theta\|^2 = O(k^{-1/2})$$

◆适应跟踪渐近最优

$$E \|y_k - y_k^*\|^2 = \delta + O(k^{-1/2})$$

数值算例-1

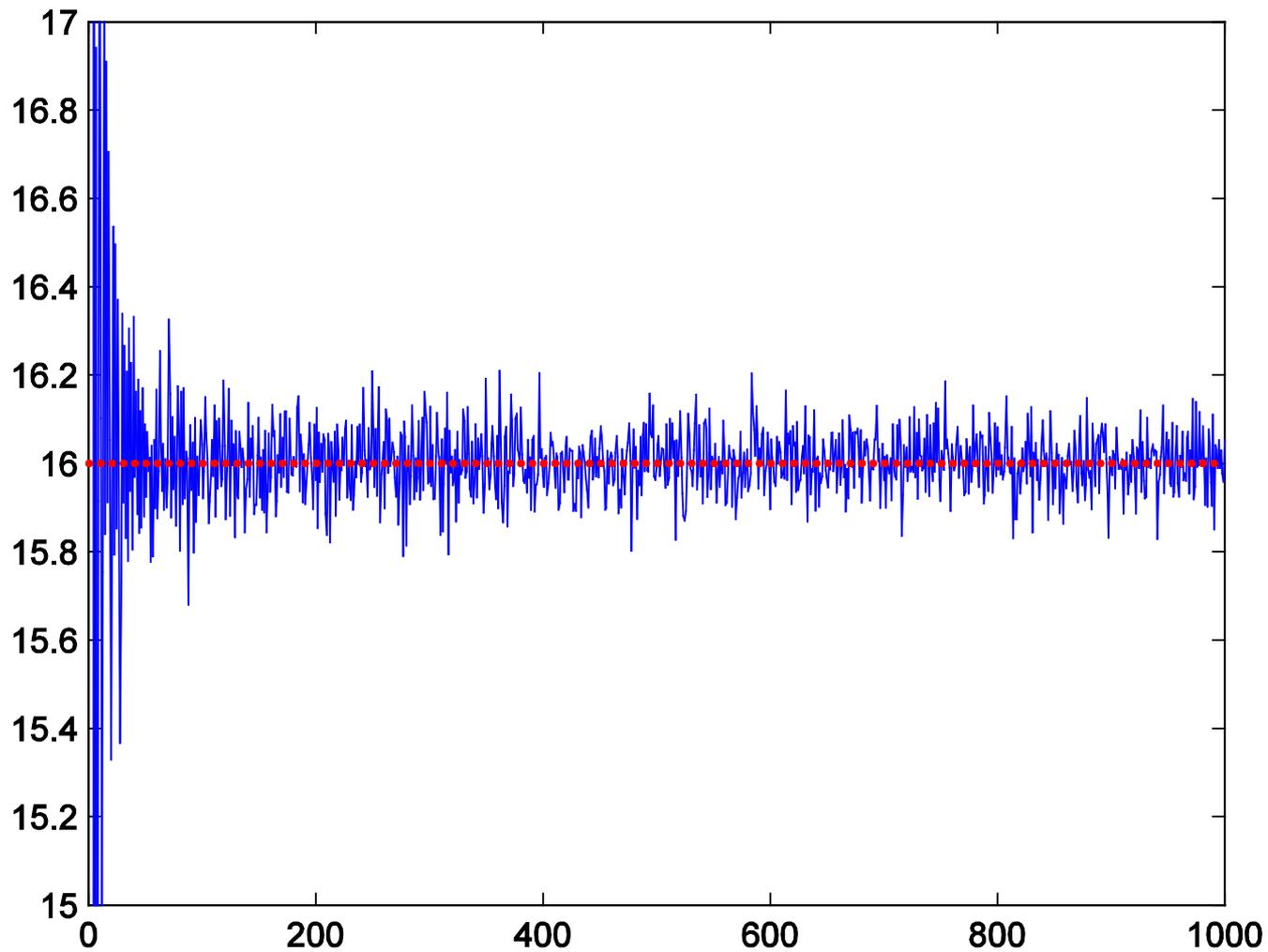
◆模型: $y_k = 6 u_{k-1} + d_k$

◆阈值: $C=2$

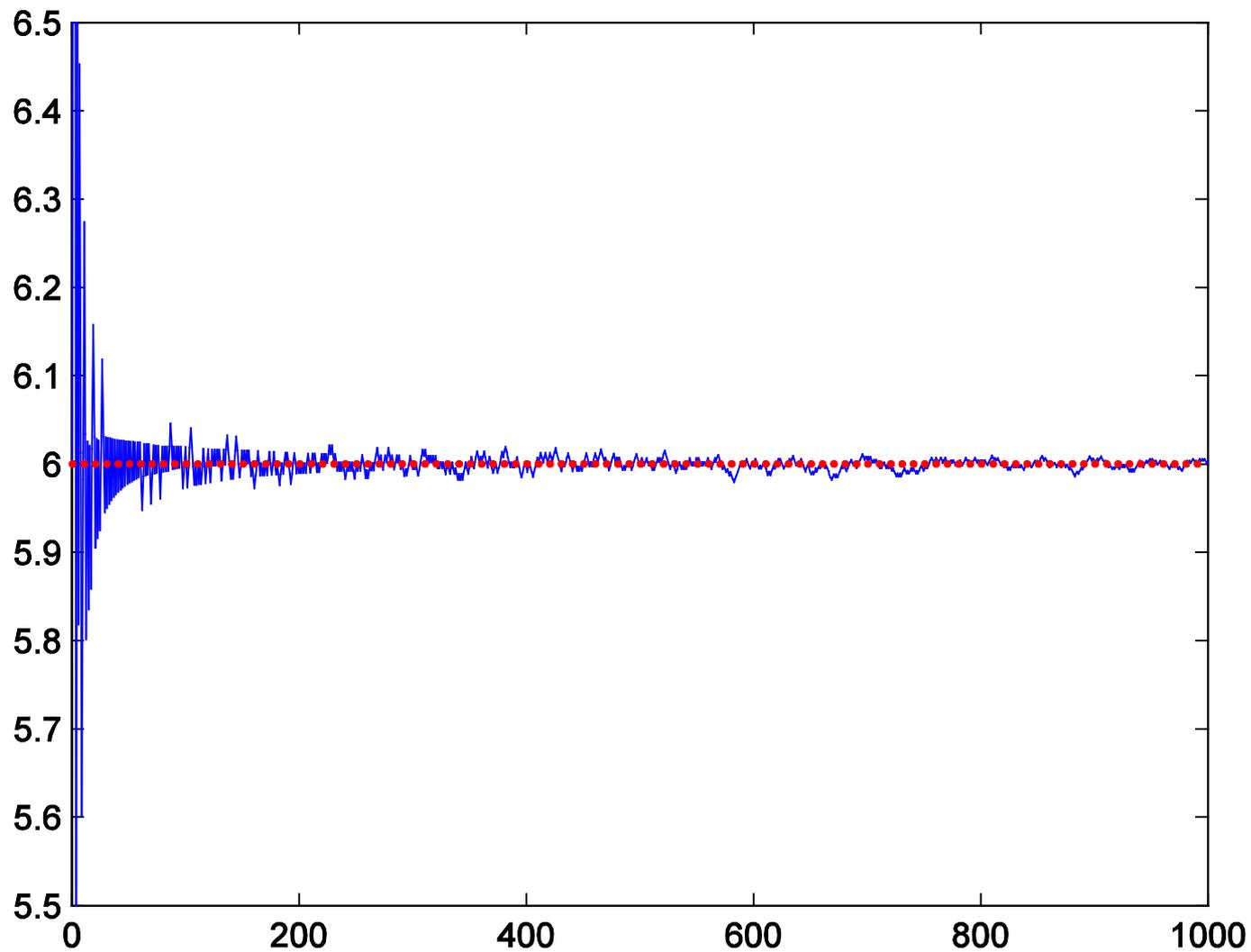
◆初始值:

$$\beta = 1, \quad \gamma = 0.5, \quad y_k^* \equiv 16, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{0.2\pi}} e^{-50\mu^2} d\mu,$$

$$\theta = 6, \quad \underline{\theta} = 1, \quad \bar{\theta} = 15, \quad \hat{\theta}_0 = P_0 = 1.$$



Tracking performance of y_k (solid) to $y^* \equiv 16$ (dashed)



Estimation convergence of $\hat{\theta}_k$ (solid) to the true parameter $\theta = 6$

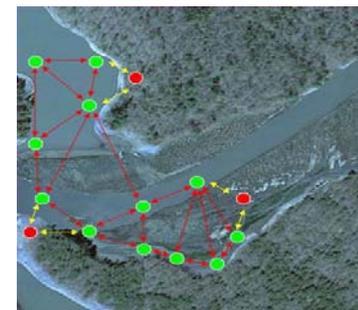
多自主主体系统控制

应用背景

- 队形控制
- 分布式滤波
- 多传感器信息融合
- 分布式计算

基于远程传感器网络的多
自主体系统的协调控制

分布式趋同控制



能量的优化利用

传输1比特
消耗的能量

≈

进行1000-3000次
运算消耗的能量

Shnayder 等
2004

极小化传输字节
以节省能量

量化传输

- Kashyap et al. Automatica 2007
- Carli et al. ECC 2007
- Carli et al. IFAC 2008
- Kar & Moura arXiv:0712 2007

- 特点:

- ✓ 量化层数为无穷
- ✓ 非零稳态误差



关键科学问题

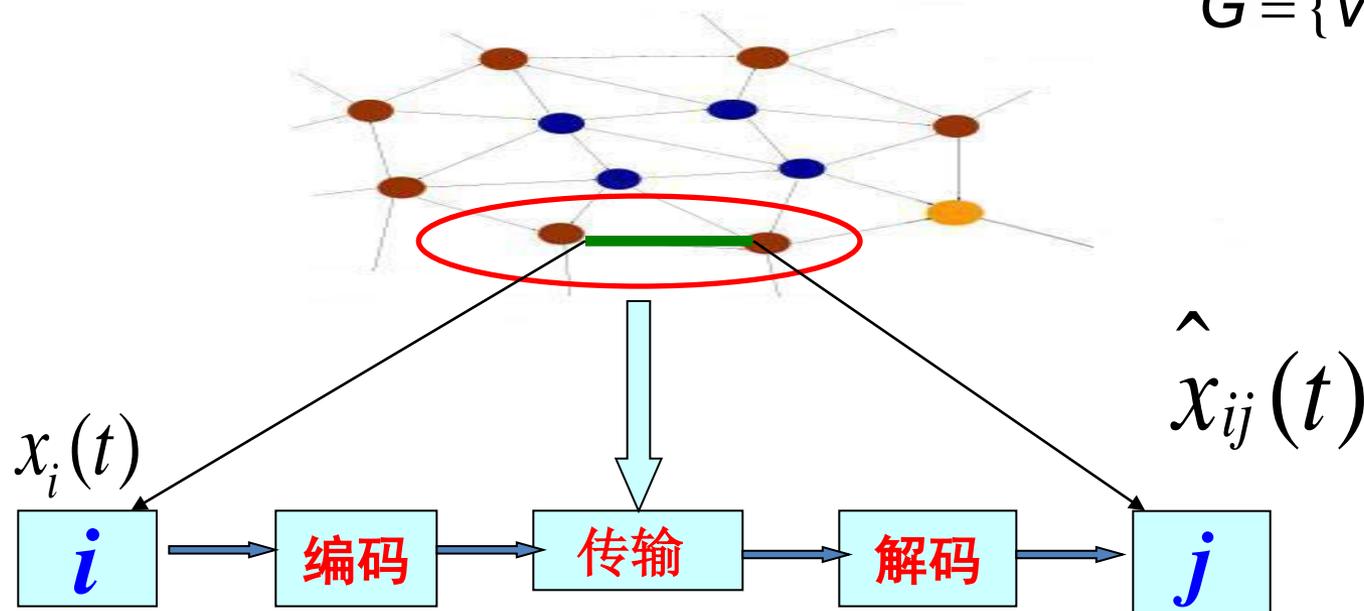
- 可否基于有限的数据传输带宽得到以指数速度趋同？
- 如果可以，为实现趋同，至少需要多大带宽？
- 带宽与趋同速度的具体关系如何？

要实现趋同，每对邻居每次通讯需要交换多少比特的信息？

系统模型

$$x_i(t+1) = x_i(t) + hu_i(t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$G = \{V, E, A\}$$



状态是实值的，但每次只能传输有限bit的数据

◆ 难点

- 量化层数有限：非线性、量化误差无界
- 量化误差：可能会导致状态发散

◆ 关键问题：

- 编码器、解码器、趋同控制协议的设计
 - ✓ 镇定系统
 - ✓ 消除量化误差的影响

模型、编码器、量化器

- 动态网络模型 $x_i(t+1) = x_i(t) + hu_i(t)$, $t = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, N$

- 无向网络 $G = \{V, E, A\}$

- 编码器 ϕ_j
$$\begin{cases} \xi_j(0) = 0, \\ \xi_j(t) = g(t-1)\Delta_j(t) + \xi_j(t-1) \\ \Delta_j(t) = q[(g(t-1))^{-1}(x_j(t) - \xi_j(t-1))] \end{cases}$$

尺度函数

新息量化

- 量化器
$$q(y) = \begin{cases} 0, & -1/2 < y < 1/2 \\ i, & (2i-1)/2 \leq y < (2i+1)/2 \\ K, & y \geq (2K-1)/2 \\ -(q(-y)), & y \leq -1/2 \end{cases}$$

$(2K+1)$ 层

$\lceil \log_2(2K) \rceil$ bits

趋同协议

- 解码器 ψ_{ji} :

$$\begin{cases} \hat{x}_{ji}(0) = 0, \\ \hat{x}_{ji}(t) = g(t-1)\Delta_j(t) + \hat{x}_{ji}(t-1), \quad t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 分布式协议:

$$u_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{x}_{ji}(t) - \xi_i(t)), \quad t = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) \\ &\quad - \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - \hat{x}_{ji}(t)) \\ &\quad + \sum_{j \in N_i} a_{ji} (x_i(t) - \hat{x}_{ij}(t)) \end{aligned}$$

误差补偿项

趋同协议

- 解码器 ψ_{ji} :

$$\begin{cases} \hat{x}_{ji}(0) = 0, \\ \hat{x}_{ji}(t) = g(t-1)\Delta_j(t) + \hat{x}_{ji}(t-1), \quad t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 分布式协议:

$$u_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{x}_{ji}(t) - \xi_i(t)), \quad t = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$u_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t))$$

$$- \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - \hat{x}_{ji}(t))$$

$$+ \sum_{j \in N_i} a_{ji} (x_i(t) - \hat{x}_{ij}(t))$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$$

关键参数

控制增益: h

量化层数: $2K+1$

尺度函数: $g(t)$



趋同速度

主要假设

(B1) G 是连通图

(B2) $\max_{1 \leq i \leq N} |x_i(0)| \leq C_x$, $\max_{1 \leq i \leq N} |\delta_i(0)| \leq C_\delta$

记 $\rho_h = \max_{2 \leq i \leq N} |1 - h\lambda_i|$ 

G 的拉氏阵的
第*i*个特征值

$$\delta(t) = \left[x_1(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N x_j(0), \dots, x_N(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N x_j(0) \right]^T$$

定理3:

若(B1)-(B2)成立, 则对任意的 $K \geq 1$, $h \in (0, 2/\lambda_N)$,

$$\Omega_K = \left\{ (h, \gamma) \mid 0 < h < \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_N}, \rho_h < \gamma < 1, M_1(h, \gamma) < K + \frac{1}{2} \right\}$$

是非空的; 对任意的 $(h, \gamma) \in \Omega_K$, 若取 $g(t) = g_0 \gamma^t$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\|\delta(t)\| = O(\gamma^t), \quad t \rightarrow \infty,$$

其中
$$M_1(h, \gamma) = \frac{\sqrt{N} h^2 \lambda_N^2}{2\gamma(\gamma - \rho_h)} + \frac{1 + h\lambda_N}{2\gamma}$$

趋同速度

若 G 是连通的, 则对任给的 $K \geq 1$, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\inf_{(h, \gamma) \in \Omega_K} \gamma}{\exp \left\{ -\frac{KQ_N^2}{2\sqrt{N}} \right\}} = 1$$

其中

$$Q_N = \frac{\lambda_2}{\lambda_N}$$

趋同速度

若G是连通的, 则对任给的 $K \geq 1$, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\inf_{(h, \gamma) \in \Omega_K} \gamma}{\exp \left\{ -\frac{K Q_N^2}{2\sqrt{N}} \right\}} = 1$$

其中

$$Q_N = \frac{\lambda_2}{\lambda_N}$$

Synchronizability

Barahona等 PRL 2002

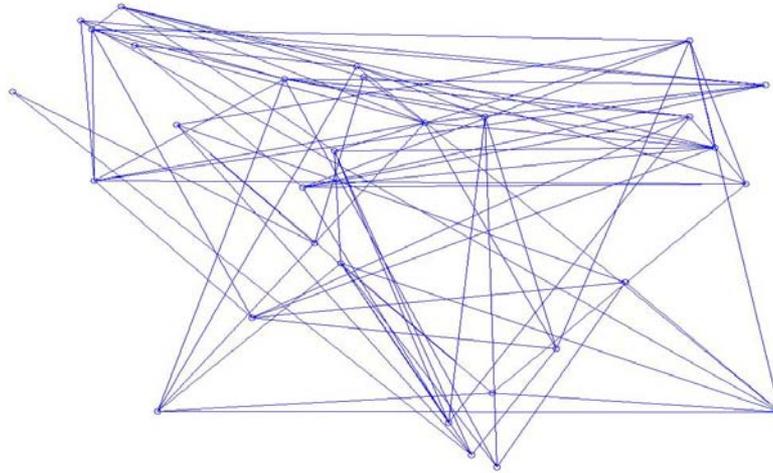
Donetti等 PRL 2005

趋同速度

收敛速度随量化层数和同步参数的增加而提高，但随个体数的增加而减小

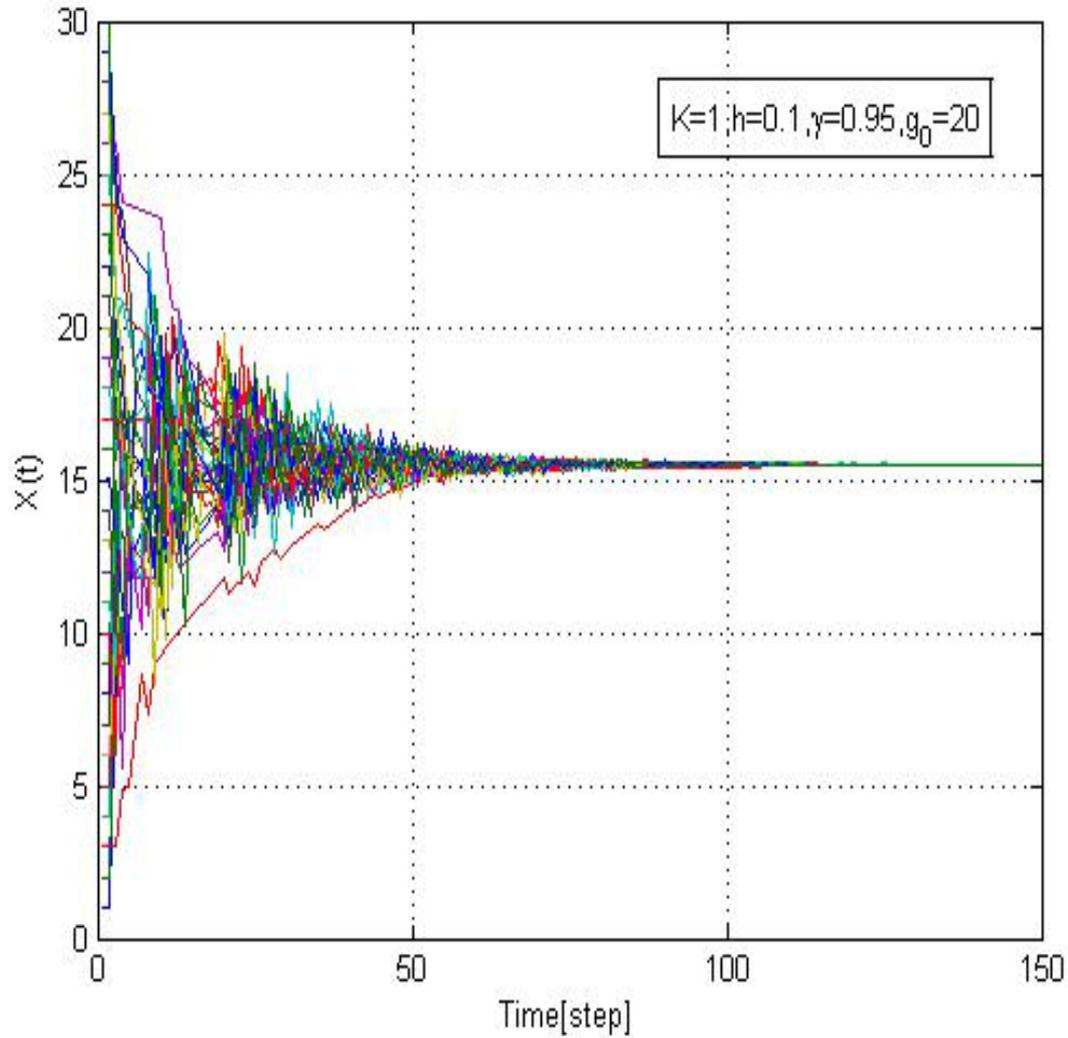
$$\inf_{(h,\gamma)\in\Omega_K} \gamma \approx \exp\left\{-\frac{KQ_N^2}{2\sqrt{N}}\right\}$$

数值算例-2



具有30个节点的网络

- 边的选取: $P\{(i, j) \in E\} = 0.2$
- 初始状态: $x_i(0) = i, i = 1, 2, \dots, 30$



1比特量化器，收敛因子0.95

具有有限带宽的
一阶离散时间多
自主体系统



基于信息编码、
解码器的协议



1bit 通讯下的指
数渐近平均趋同



收敛速度与系统
参数之间的关系

结束语

- ◆可基于低精度数据给出高精度的辨识
- ◆可基于低精度数据给出渐近最优的适应跟踪控制
- ◆可基于1比特的通信数据实现趋同控制

- ◆可基于低精度数据给出高精度的辨识
- ◆可基于低精度数据给出渐近最优的适应跟踪控制
- ◆可基于1比特的通信数据实现趋同控制

对于一个给定的辨识或控制任务，
究竟需要多少信息量？

任务、约束与复杂性

- 任务

建模、辨识还是控制

- 约束

机理约束、测量条件、成本约束、时间/速度要求、精度要求、通讯及信息处理能力、.....

- 复杂性

计算复杂度、实现复杂度、理论分析的复杂度等

$F(\text{任务、约束、复杂性})=?$

谢谢